

## - Aires

①

La matrice  $m$  contient par colonne, les sommets d'un triangle et chaque colonne de  $q$  renferme les coordonnées d'un sommet de triangle donc

$q(:, m(i; k))$  représente <sup>les coordonnées</sup> des  $i$ -ème sommets du  $k$ -ième triangle de notre maillage.

on cherche l'aire d'un triangle quelconque dont on peut trouver les coordonnées <sup>des sommets</sup> par la bijection avec  $F_k$  connaissant les sommets principal du triangle dégenère.

Soit  $q_1, q_2, q_3$  les trois sommets d'un triangle  $k$   
 $q_i = F_k(\hat{q}_i)$  où  $\hat{q}_i$  est un sommets de triangles de référence

L'aire du triangle formé par ces sommets est donnée par

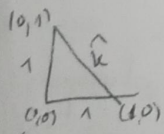
$$\int_k dq = \int_k F_k(\hat{q}_i) d\hat{q} \quad \int_k dq \text{ donc pour notre formule}$$

$$J \equiv 1$$

$$\text{On a alors } \int_k dq = |\det A_k| \int_{\hat{k}} d\hat{q}$$

Aire du triangle de référence

l'aire du triangle de référence étant aisément calculable i.e



$$A_{\hat{k}} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ donc } \int_k dq = \frac{1}{2} |\det A_k|$$

## - Maillage (unit square)

+ 9

On remarque dans notre cas ici que si  $x = 0; \frac{1}{N_x - 1}; 1$  et  $y = 0; \frac{1}{N_y - 1}; 1$  alors que  $q$  se present comme

$x$	$x$		$x$
$y_1$	$y_2$		$y_{N_y}$

Créons, donc une matrice renfermant sur chaque ligne le vecteur  $x$  et une autre renfermant sur chaque colonne le vecteur  $y$

$$A = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} y & y & \dots & y \end{pmatrix} \quad (\text{Chaque ligne de } B \text{ renferme le même } y_i)$$

Alors la matrice  $\begin{pmatrix} A(i;:) \\ B(i;:) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y_i \end{pmatrix}$

Posons  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in N_y$  comme  $x$  se répète  $N_y$  fois dans  $q$

$$A = X \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (x_1 \dots x_{N_x}) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{N_x} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & \dots & x_{N_x} \end{pmatrix} \quad \uparrow N_x$$

Posons ensuite  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in N_x$  comme pour chaque répétition de  $x$  il faut le même nombre de  $y_i$ 

$x$
$y_i$

.  $y_i$  doit être répété le nombre d'éléments de  $x$ -fois.

$B = Y \cdot y$ . (Dans le code  $A = A \cdot x$ ,  $B = A \cdot y$ )

Plus qu'à adjoindre ces matrices pour former  $q$ .

$A(:,i)$  donnant le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} A(:,1) \\ A(:,2) \\ \vdots \\ A(:,N_y) \end{pmatrix}$

transposons d'abord  $A$  avant afin d'avoir sur chaque colonne le vect  $x$

$$A' = \begin{pmatrix} x & x & \dots & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N_y} & x_{N_y} & \dots & x_{N_y} \end{pmatrix}$$

$$A'(:,i) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N_y} \end{pmatrix}$$

$$[A'(:,i)]' = \underbrace{(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N_y})}_x ; \underbrace{(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N_y})}_x \dots \underbrace{(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N_y})}_x$$



matrice  $B(i) :$

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ y_{j+1} \\ y_{j+2} \\ \vdots \\ y_{j+k} \\ \vdots \\ y_{N_y} \end{pmatrix} H_e \quad (2)$$

Donc en posant  $q(1, :) = (A'(i))'$  et  $q(2, :) = B(i)$  on obtient le modèle de  $q$  adapté.

→ me

Selon la configuration de l'exemple donné, on numérote d'abord les triangles inférieurs par rapport à une ligne à l'autre.

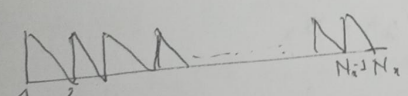
Pour parcourir les lignes nous avons utilisé une boucle sur  $j$  entre 1 et  $N_y - 1$  car à chaque ligne on nomme les triangles au dessus de celui-ci, ce triangle n'existant pas pour  $j = N_y$ .

Ensuite pour pouvoir récupérer à chaque ligne, l'indice du premier élément, on a créé le variable  $Ip = (j-1) \times N_x + 1$  donnant pour

chaque ligne  $j$ .

Ensuite une boucle pour nommer les triangles inférieurs pour  $i$  entre 1 et  $N_x - 1$ , car le dernier point ne pouvant donner de triangle inférieur.

configuration de la colonne est

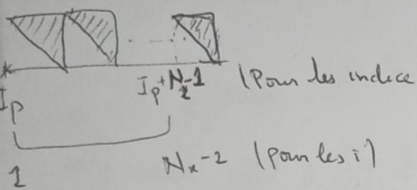


Pour chaque triangle colonne de me la

$\left( \begin{array}{c} \text{Point actuel selon } Ip \\ \text{Point suivant} \\ \text{Point au dessus} \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{c} Ip \\ Ip+1 \\ Ip+N_x \end{array} \right)$	Pour trouver le point au dessus il suffit d'ajouter $N_x$
---	--	---

Comme  $Ip$  donnant le premier élément,  $\left( \begin{array}{c} Ip \\ Ip+1 \\ Ip+N_x \end{array} \right)$  nous donne bien cette configuration, on  $\S$  incrémente donc  $Ip$  de 1 pour passer lors de la prochaine boucle au triangle inférieur suivant. Par ailleurs on a créé une variable  $k$  initialisée à 1 (en référence à la première colonne de me) que nous incrémentons de 1 dans chaque boucle pour passer au remplissage de la colonne  $k$  de me.

Ce n'est qu'après avoir nommé tous les triangles supérieurs que nous pouvons maintenant passer au triangle supérieur. Comme il sont au même nombre que les triangles inférieurs de la ligne  $j$  nous avons gardé la même boucle sur  $i$  que précédemment. Aussi nous n'avons pas oublié de réinitialiser  $I_p$  à l'indice du premier point de la ligne comme il avait été modifié lors des nominations des triangles inférieurs. On est alors dans le cas de figure



la configuration souhaitée est donc

(Point suivant  $I_p$   
 Point au dessus du point suivant  $I_p$   
 Point au dessus de  $I_p$ )

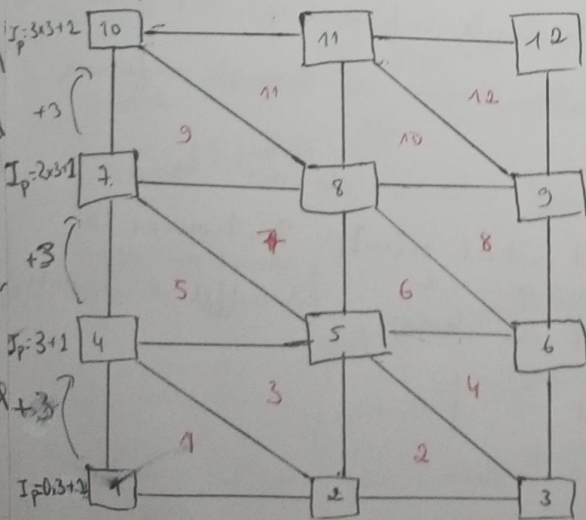
ce qui correspond à

$$\begin{pmatrix} I_p + 1 \\ I_p + 1 + N_x \\ I_p + N_x \end{pmatrix}$$

et de la même manière que précédemment on incrémente  $I_p$  pour passer à la nomination suivante ainsi que le pour la colonne suivante de même.

Raison du choix de la formule de  $I_p$

Exemple de maillage pour  $N_x = 3$ ;  $N_y = 4$



Le passage d'un premier indice d'une ligne à une autre se fait en additionnant celui-ci de  $N_x$

$$I_p(j+1) = I_p(j) + N_x$$

A la fin de chaque ligne on a un multiple de  $N_x$

De la ligne  $j-1$  à la ligne  $j$ , ce multiple est le nombre de ligne parcouru avant la ligne  $j$  (ie  $j-1$  ligne)

donc on a à la ligne  $j$   $I_p = (j-1) \times N_x + 1$ . Le plus +2 pour passage à la ligne suivante



(3)

→ Rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ :

On a besoin de construire un ~~triangle~~ carré unité de côté 1

L'idée est de partir  $[0, 1] \times [0, 1]$  pour  $[a, b] \times [c, d]$

On va essayer de dilater l'intervalle  $[0, 1]$  en  $[a, b]$  puis en  $[c, d]$ .

En posant  $(q; m_e) = \text{unit square } (N_x; N_y)$ , on va essayer de dilater la répartition des coordonnées dans  $q$

$q(1; :)$  pour les abscisses

Pour cette dilataion sur  $[a, b]$  il suffit ~~q~~ de prendre le nouveau

$$q(1; :) = (b-a) q(1; :) + a \text{ et } q(2; :) = (d-c) q(2; :) + c$$

La disposition de la matrice  $m_e$  correspond également à celle du cas du carré unité donc pas besoin de le modifier.

→ Maillage du triangle unité:

\*  $q$

On s'intéresse à la matrice de point de maillage dans un triangle rectangle unité. Comme l'indice le schéma de référence on veut

les points de la ligne 1 à  $N_y = N$  numérotés de gauche à droite.

Ensuite, on parcourt les lignes de bas en haut; le nombre de point diminue de 1 d'une ligne à l'autre.

Dans un premier temps séparons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N-1$  intervalles de même longueur ( $h = \text{length}(0, 1, N)$ ). On parcourt les lignes de 1 à  $N$  et  $j = 1:N$ . Pour le parcours des lignes colonne, cela dépend de la ligne

$j = 2$ ;  $i$  de 1 à  $N$

$j = 3$ ;  $i$  de 1 à  $N-1$

$j = 3$ ;  $i$  de 1 à  $N-2$

$j = N$ ;  $i = 1$

On remarque que  $i$  parcourt de 1 à  $N-j+1$  et en initialisant  $k$  à 1 on établit  $q(i; k) = [x(i); x(j)]$  en incrémentant le  $i$  à chaque fois  $x(i)$  s'assure qu'on reste dans le triangle.

Pour le nombre de triangle, il y en a autant que de carré de  $\frac{1}{N-1}$  dans le carré unité, ie  $(N-1) \times (N-1)$  de la même manière

que précédemment nous allons construire me donc pour chaque ligne  $j$  de 1 à  $N-1$ . Comme pour précédemment avec les triangles  $i$  parcourt de 1 à l'avant dernier point de la ligne ( $N-j$  comme le dernier est  $N-j-1$ ) pour les triangle inférieur

et de 1 à  $N-j-1$  pour les supérieurs ou que l'avant dernier point ne permet de nommer aucun triangle.  $I_p$  indice du premier élément de la ligne

+ Inférieur

$\begin{pmatrix} I_p \\ \text{Point suivant } I_p \text{ ( } I_p+1 \text{ )} \\ \text{Point au dessus} \end{pmatrix}$

Pour le point au dessus comme le dernier point de ligne est  $N-j+1$  il suffit de lui ajouter  $I_p$  pour le trouver.

+ Supérieur

Il y a à chaque ligne 1 triangle supérieur de moins que les triangles inférieur alors  $i: 1; N-j-1$ .

$\begin{pmatrix} I_p+1 \\ \text{Point au dessus de } I_p+1 \\ \text{Point avant le point au dessus de } I_p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p+1 \\ I_p+1+N-j+1 \\ I_p+N-j+1 \end{pmatrix}$

Par ailleurs contrairement au me des carrés, on n'a pas utilisé d'ord de formule pour le premier indice de chaque ligne à la place; on a initialisé  $I_p = 1$  et  $I_{pp} = 1$ .  $I_{pp}$  servira à garder la valeur du premier indice de chaque ligne

Comme la boucle pour les triangle supérieur s'arrête à  $N-j-1$   $I_p$  indexe la colonne ( $N-j$ ) à la fin de la boucle  $(I_p+N-j-1+2)$  ↑  
donc en faisant  $I_p = I_p+2$  on trouve le premier indice de la ligne suivante et en faisant  $I_{pp} = I_p$  et  $I_p = I_{pp}$  ~~entre~~ après  
Pour sortir de la boucle



(4)

les triangle inférieur, on s'assure que  $I_p$  contient à cet instant la valeur de premier l'indice du premier point,

→ Maillage triangle quelconque

On a défini dans le TP plus tôt la fonction

$$f_k: \hat{K} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow K \subset \mathbb{R}^2$$

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \longrightarrow q = q^0 + (q^1 - q^0)\hat{x} + (q^2 - q^0)\hat{y}$$

nous permettant d'avoir un point triangle dégenéré connaissant le triangle unité (en terme de sommet). Ayant déjà les coordonnées  $q$  pour le triangle unité, il suffit de poser

$q = q^0 + (q^1 - q^0)\hat{x} + (q^2 - q^0)\hat{y}$  où  $\hat{x}$  (resp  $\hat{y}$ ) est une abscisse (resp ordonnée) dans le triangle unité, donc il suffit de prendre  $\hat{x} = q(1; :)$  et  $\hat{y} = q(:, 2)$  où

$[q, me] = \text{meshes}$ . un triangle (N). Pas besoin de modifier le  $me$  car il est indépendant des sommet qu'on principal.